第26卷 第5期
2009年10月

工 程 数 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 26 No. 5
Oct. 2009

文章编号:1005-3085(2009)05-0806-05

M-P逆在线性随机方程中的应用*

姚落根[1,2]， 欧 辉[1]， 杨向群[1]

(1- 湖南师范大学数学与计算机科学学院，长沙 410081； 2- 湖南商学院信息学院，长沙 410205)

摘 要: 本文证明了可料过程的M-P逆仍然可料。利用M-P逆讨论了线性随机方程可料解的结构，由此求出了扩散模型中的所有等价鞅测度，并给出了最小逆熵鞅测度。

关键词: M-P逆；扩散模型；等价鞅测度

分类号: **AMS**(2000) 60H20; 90A09 **中图分类号**: F830.9; O211.6 **文献标识码**: A

1 引言

在金融数学及其他领域研究中，经常遇到如下线性随机方程

$$\sigma(t)Y(t)=C(t),\quad t\geq 0,\tag{1}$$

其中σ，C分别是给定概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P)$上的$\mathbf{R}^{d\times n}$值和$\mathbf{R}^d$值的可料随机过程。我们需要得到(1)的所有可料解。(1)有解(未必可料)的充要条件是

$$\mathrm{rank}\sigma(t)=\mathrm{rank}(\sigma(t),C(t)),\quad \forall\, t\geq 0$$

几乎处处成立。本文利用高等代数中的M-P逆来求这个方程(σ未必几乎处处满秩)的可料解。

定义1 设矩阵$A\in\mathbf{R}^{d\times n}$，如果矩阵$X\in\mathbf{R}^{n\times d}$满足如下四个方程

$$AXA=A,\quad XAX=X,\quad (AX)'=AX,\quad (XA)'=XA,$$

则称X为A的M-P逆，记为A^+。

Moore和Penrose已证明，对任意实矩阵A，其M-P逆是唯一存在的。下面以引理的形式给出将要用到的性质。

引理1 设$A\in\mathbf{R}^{d\times n}$，则

1) $(A')^+=(A^+)'$，$A^+=(A'A)^+A'=A'(AA')^+$，$(A'A)^+=A^+(A^+)'$；

2) 如果线性方程组$Ax=b$有解，则该方程组的所有解可表示为$x=A^+b+(I_d-A^+A)z$，其中z是任意的d维列向量。

对$\mathbf{R}^d$值，可料随机过程$M(t)=(M_1(t),\cdots,M_2(t))$，若$M(t)\in\mathcal{M}^2_{0,loc}$(初值为0的局部平方可积鞅)，则其二次变差过程为

$$\langle M(t)\rangle=\begin{pmatrix}\langle M_1(t),M_1(t)\rangle & \cdots & \langle M_1(t),M_d(t)\rangle\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \langle M_d(t),M_1(t)\rangle & \cdots & \langle M_d(t),M_d(t)\rangle\end{pmatrix}.$$

收稿日期: 2008-11-24. **作者简介**: 姚落根(1974年2月生)，男，博士，讲师. 研究方向：数理金融.

***基金项目**: 国家自然科学基金(10571051; 10871064)；湖南省社会科学基金(08YBB187).

文 [1] 证明了 $\langle M(t)\rangle$ 的 M-P 逆仍然可料，并且以一个反例来说明，$\langle M(t)\rangle$ 的其他广义逆不一定保持可料性。受此启发，本文证明了任意取值于 $\mathbf{R}^{d\times n}$，可料随机过程的 M-P 逆仍然可料，并由此求得随机方程 (1) 的所有可料解。

2　$\mathbf{R}^{d\times n}$ 值可料随机过程的 M-P 逆

本节考虑随机过程 σ 的 M-P 逆。令 $r_t = \text{rank}\sigma(t)$，则 r 可料[1]。按满秩分解定理，对 $(\omega, t)\in(r=k)$，存在过程 $F_k(t)\in\mathbf{R}^{d\times k}$，$G_k(t)\in\mathbf{R}^{k\times n}$，使得

$$\sigma(t) = I_{\{r=k\}}F_k(t)G_k(t),$$

其中 $\text{rank}F_k(t) = \text{rank}G_k(t) = k$。于是

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^{d\wedge n} I_{\{r=k\}}F_k(t)G_k(t).$$

定义 $\sigma(t)^+$ 如下

$$\sigma(t)^+ = \sum_{k=0}^{d\wedge n} I_{\{r=k\}}G_k(t)'\big[G_k(t)G_k(t)'\big]^{-1}\big[F_k(t)'F_k(t)\big]^{-1}F_k(t)'. \tag{2}$$

定理 1　设 $\sigma(t)$ 可料，则按 (2) 定义的 $\sigma(t)^+$ 是 $\sigma(t)$ 的 M-P 逆，且 $\sigma(t)^+$ 可料。

证明　容易验证 $\sigma(t)^+$ 满足定义 1 的四个方程。由 M-P 逆的唯一性，可得 $\sigma(t)^+$ 是 $\sigma(t)$ 的 M-P 逆。还需证明 $\sigma(t)^+$ 可料。因为 $F_k(t)$，$G_k(t)$ 是通过可料过程 $\sigma(t)$ 的连续变换得到的，故 $F_k(t)$，$G_k(t)$ 可料。于是，$[G_k(t)G_k(t)']^{-1}$ 和 $[F_k(t)'F_k(t)]^{-1}$ 也可料。再由 r_t 的可料性，即可推出 $\sigma(t)^+$ 可料。

接下来考虑随机方程 (1) 的解 (假定其存在解)。首先需区分可料解与非可料解。

定义 2　称 $\mathbf{R}^d$ 值随机过程 $\Theta = \{\Theta(t); t\ge 0\}$ 为方程 (1) 的一般解，如果

$$P\big(\{\sigma(t)\Theta(t) = C(t),\ \forall\, t\ge 0\}\big) = 1. \tag{3}$$

如果 Θ 还是可料的，则称为严格解。

显然，严格解一定是一般解，但一般解不一定是严格解。

定理 2　随机方程 (1) 存在严格解的充分必要条件是它存在一般解。

证明　如果 $Y(t)$ 是随机方程 (1) 的严格解，$Y(t)$ 必是方程 (1) 的一般解。现在设 $Y(t)$ 是随机方程 (1) 的任意一个一般解，令 $\Theta_0(t) = \sigma(t)^+C(t)$。则由定理 1，$\Theta_0(t)$ 是可料过程。再由

$$\sigma(t)\Theta_0(t) = \sigma(t)\sigma(t)^+C(t) = \sigma(t)\sigma(t)^+\sigma(t)Y(t) = \sigma(t)Y(t) = C(t).$$

故 $\Theta_0(t)$ 是随机方程 (1) 的严格解。

下面讨论随机方程 (1) 解的结构。令

$$\mathcal{A}(\sigma) = \{Y(t) : Y(t)\ \text{是取值于}\ \mathbf{R}^n\ \text{的可料过程, 且}\ \sigma(t)Y(t) = 0,\ t\ge 0,\ a.s.P.\},$$

$$\mathcal{B}(\sigma) = \{(I_n - \sigma(t)^+\sigma(t))Z(t) : Z(t)\ \text{是任意取值于}\ \mathbf{R}^n\ \text{的可料过程.}\},$$

其中 I_n 是 n 阶单位阵。因为 $Y(t)\equiv 0\in\mathcal{A}(\sigma)$，故 $\mathcal{A}(\sigma)$ 不是空集。

定理3 $\mathcal{A}(\sigma)=\mathcal{B}(\sigma)$。

证明 设$Y(t)\in\mathcal{A}(\sigma)$，则由$(I_n-\sigma(t)^+\sigma(t))Y(t)=Y(t)$，知$\mathcal{A}(\sigma)\subset\mathcal{B}(\sigma)$。再设$Z(t)$是取值于$\mathbf{R}^n$的任意可料过程。因为

$$\sigma(t)\big(I_n-\sigma(t)^+\sigma(t)\big)Z(t)=\sigma(t)Z(t)-\sigma(t)\sigma(t)^+\sigma(t)Z(t)=\sigma(t)Z(t)-\sigma(t)Z(t)=0,$$

故有$\mathcal{A}(\sigma)\supset\mathcal{B}(\sigma)$。定理得证。

定理4 $\Theta(t)$是(1)的严格解的充要条件是存在$Y(t)\in\mathcal{A}(\sigma)$，使得$\Theta(t)=\Theta_0(t)+Y(t)$。

证明 设$\Theta(t)$是随机方程(1)的严格解，则$\Theta(t)$可料。令$Y(t)=\Theta(t)-\Theta_0(t)$，显然，$Y(t)$可料，且有

$$\sigma(t)Y(t)=\sigma(t)\Theta(t)-\sigma(t)\Theta_0(t)=0.$$

即$Y(t)\in\mathcal{A}(\sigma)$。反之，设$Y(t)\in\mathcal{A}(\sigma)$，则$\Theta(t)=\Theta_0(t)+Y(t)$可料，且

$$\sigma(t)\Theta(t)=\sigma(t)Y(t)+\sigma(t)\Theta_0(t)=\sigma(t)\Theta_0(t)=C(t).$$

故$\Theta(t)$是随机方程(1)的严格解。

由定理3和定理4，随机方程(1)的严格解的通解具有如下形式

$$\Theta(t)=\Theta_0(t)+\big(I_n-\sigma(t)^+\sigma(t)\big)Z(t), \tag{4}$$

其中$Z(t)$是取值于$\mathbf{R}^n$的任意可料过程。

3 M-P逆在扩散模型中的应用

考虑如下扩散模型，市场中有$d+1$种资产，其价格过程满足如下微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{d}S_0(t)=r_tS_0(t)\mathrm{d}t, \quad S_0(0)=1, \quad 0\le t\le T, \\ \mathrm{d}S_i(t)=a_i(t)S_i(t)\mathrm{d}t+S_i(t)\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_{ij}(t)\mathrm{d}W_j(t), \quad S_i(0)=S_i, \quad i=1,\cdots,d, \end{cases} \tag{5}$$

其中

$$W=\big\{W(t)=\big(W_1(t),W_2(t),\cdots,W_n(t)\big)',\mathcal{F}_t;\ 0\le t\le T\big\}$$

是定义在某带σ-代数流的概率空间$(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P)$上的标准布朗运动，$\{\mathcal{F}_t\}$是由自然$\sigma$-代数流$\{\mathcal{F}_t^W\}$在概率$P$下的扩张形成的。假定平均收益率过程$a(t)=(a_1(t),a_2(t),\cdots,a_d(t))'$、扩散过程$\sigma(t)=(\sigma_{ij}(t))_{1\le i\le d,1\le j\le n}$以及短期利率过程$r_t$都可料，且$a(t)$, $\sigma(t)$满足使方程(5)有唯一强解所需要的条件(如Lipschitz条件)。为简单起见，记上面的市场模型为$M(r,a,\sigma)$。

记$C(t)=a(t)-r_t\overrightarrow{1}$，这里$\overrightarrow{1}$是每个分量都为1的$d$维矩阵。$Q$是等价鞅测度的充要条件是存在可料过程$\Theta(t)$, $P(\int_0^T\|\Theta(u)\|^2\mathrm{d}u<+\infty)=1$，使得

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\Big|\mathcal{F}_t=\varepsilon\Big(-\int_0^t\Theta(u)\mathrm{d}W(u)\Big), \tag{6}$$

其中$\Theta(t)=(\Theta_1(t),\cdots,\Theta_n(t))'$满足如下的随机方程

$$\sigma(t)X(t)=C(t), \quad P-\text{a.s.} \quad t\in[0,T]. \tag{7}$$

定义 3　称取值于 $\mathbf{R}^n$ 的随机过程 $\Theta = \{\Theta(t), 0 \le t \le T\}$ 为风险溢价过程，如果 Θ 可料，且满足 (7)。

为了求出一个具体的风险溢价过程，通常对 $\sigma(t)$ 作出许多限制，目的都是保证 $[\sigma(t)\sigma(t)']^{-1}$ 或者 $[\sigma(t)'\sigma(t)]^{-1}$ 存在。下面我们利用 M-P 逆来解决这个问题。如果记 $\mathcal{P}$ 为 $M(r,a,\sigma)$ 中等价鞅测度的全体，令

$$\Lambda = \Big\{Z(t): Z(t)\text{ 是 } d \text{ 维可料过程, 且 } P\Big(\int_0^T \|(I_n - \sigma(u)^+\sigma(u))Z(u)\|^2 \mathrm{d}u < +\infty\Big) = 1\Big\}.$$

定理 5　如果 $\Theta_0(t)$ 满足

$$P\Big(\int_0^T \|\Theta_0(u)\|^2 \mathrm{d}u < +\infty\Big) = 1.$$

则 $Q \in \mathcal{P}$ 的充要条件是存在 $Z \in \Lambda$，使得

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\Big|\mathcal{F}_t = \varepsilon\Big(-\int_0^t \Theta_0(u)\mathrm{d}W(u)\Big)\varepsilon\Big(-\int_0^t (I_n - \sigma(u)^+\sigma(u))Z(u)\mathrm{d}W(u)\Big).$$

证明　首先注意到风险溢价过程 $\Theta(t)$ 具有形式 (4)，且有

$$\begin{aligned}(\Theta_0(t))'(I_n - \sigma(t)^+\sigma(t))Z(t) &= (\sigma(t)^+C(t))'(I_n - \sigma(t)^+\sigma(t))Z(t)\\ &= (\sigma(t)^+\sigma(t)\Theta_0(t))'(I_n - \sigma(t)^+\sigma(t))Z(t) = 0.\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}\|\Theta(t)\|^2 &= [\Theta_0(t) + (I_n - \sigma(t)^+\sigma(t))Z(t)]'[\Theta_0(t) + (I_n - \sigma(t)^+\sigma(t))Z(t)]\\ &= \|\Theta_0(t)\|^2 + \|(I_n - \sigma(t)^+\sigma(t))Z(t)\|^2.\end{aligned}$$

在定理的条件下，显然

$$P\Big(\int_0^T \|\Theta(u)\|^2 \mathrm{d}u < +\infty\Big) = 1 \Leftrightarrow P\Big(\int_0^T \|(I_n - \sigma(u)^+\sigma(u))Z(u)\|^2 \mathrm{d}u < +\infty\Big) = 1.$$

即 $Z \in \Lambda$。再由 (6)，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\Big|\mathcal{F}_t &= \exp\Big\{-\int_0^t \Theta(u)\mathrm{d}W(u) - \frac{1}{2}\int_0^t \|\Theta(u)\|^2 \mathrm{d}u\Big\}\\ &= \varepsilon\Big(-\int_0^t \Theta_0(u)\mathrm{d}W(u)\Big)\varepsilon\Big(-\int_0^t (I_n - \sigma(u)^+\sigma(u))Z(u)\mathrm{d}W(u)\Big).\end{aligned}$$

记与 $Z(t) \equiv 0$ 对应的鞅测度为 Q_0，即

$$\frac{\mathrm{d}Q_0}{\mathrm{d}P}\Big|\mathcal{F}_t = \varepsilon\Big(-\int_0^t \Theta_0(u)\mathrm{d}W(u)\Big).$$

由定理 5，鞅测度之间的差别，仅仅在于它们对应的可料过程 Z 不同。于是，选择哪一个鞅测度作为定价测度的问题就转化为求其对应的 Z。这样一来，问题就简化了许多。下面的例子说明了这个问题。

例1 在模型 $M(r,a,\sigma)$ 中，最小逆熵鞅测度 (the minimal reverse entropy martingale measure) 为 Q_0。

最小逆熵鞅测度是最优化问题

$$\min_{Q\in\mathcal{P}} E_P\Big(-\ln\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\Big)$$

的解。设 $Q\in\mathcal{P}$,

$$\begin{aligned} E_P\Big(-\ln\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\Big) &= \frac{1}{2}E_P\Big\{\int_0^T[\,\|\Theta_0(u)\|^2+\|(I_n-\sigma(u)^+\sigma(u))Z(u)\|^2]\mathrm{d}u\Big\} \\ &\geq \frac{1}{2}E_P\Big(\int_0^T\|\Theta_0(u)\|^2\mathrm{d}u\Big). \end{aligned}$$

即 Q_0 是最小逆熵鞅测度。

参考文献:

[1] Dzhaparidze K, Spreij P J C. On correlation calculus for multivariate martingales[J]. Stochastic Processes and Their Applications, 1993, 46: 283-299
[2] 卢同善. 随机泛函分析及应用[M]. 青岛：青岛海洋大学出版社，1990
[3] Karatzas I, Shreve S. Stochastic Calculus for Finance: Continuous-time Models[M]. New York: Springer, 2004
[4] 王松桂，杨振海. 广义逆矩阵及其应用[M]. 北京：北京工业大学出版社，1996
[5] Vicky H, David H, Sam H. A comparison of q-optimal option prices in a stochastic volatility model with correlation[J]. Review of Derivatives Research, 2005, 8: 5-25

Application of Moore-Penrose Inverse in Linear Stochastic Equation

YAO Luo-gen[1,2], OU Hui[1], YANG Xiang-qun[1]

(1- College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha 410081;
2- College of Information, Hunan University of Commerce, Changsha 410205)

Abstract: This paper proves that the M-P inverse predictable process is still predictable. By employing the M-P inverse, we discussed the structure of predictable solutions of the linear stochastic equation. All equivalent martingale measures and the minimal reverse entropy martingale measure in a diffusion model are obtained.

Keywords: Moore-Penrose inverse; diffusion model; equivalent martingale measures